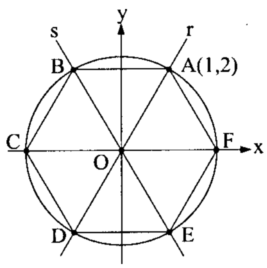
UNIFESP – 21/12/2002

MATEMÁTICA

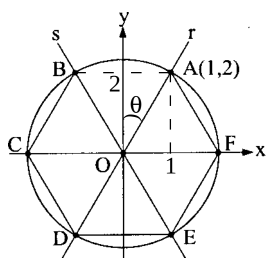
20. A figura representa, em um sistema ortogonal de coordenadas, duas retas, r e s, simétricas em relação ao eixo Oy, uma circunferência com centro na origem do sistema, e os pontos A = (1, 2), B, C, D, E e F, correspondentes às interseções das retas e do eixo Ox com a circunferência.



Nestas condições, determine

a) as coordenadas dos vértices B, C, D, E e F e a área do hexágono ABCDEF.
b) o valor do cosseno do ângulo AÔB.

Resolução:



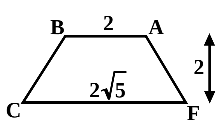
a) Se A(1, 2) então $\begin{cases} B(-1, 2) \\ D(-1, -2) \\ E(1, -2) \end{cases}$

Calculando OA, obtemos

$OA^2 = 1^2 + 2^2 \therefore OA = \sqrt{5}$

Portanto $F(\sqrt{5}, 0)$ e $C(-\sqrt{5}, 0)$.

A área do hexágono é



$S_H = 2S_{\text{trapézio}} = 2\,\dfrac{(2 + 2\sqrt{5})2}{2}$

$\mathbf{S_H = 4(1 + \sqrt{5})}$

b) $\cos A\hat{O}B = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\cos A\hat{O}B = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 \therefore \mathbf{\cos A\hat{O}B = \frac{3}{5}}$$

ou pela Lei dos Cossenos:

$$2^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{5}\cos 2\theta$$

$$4 = 10 - 10\cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\cos 2\theta = \frac{3}{5}}$$

21. A área da região hachurada na figura A vale $\log_{10} t$, para $t > 1$.

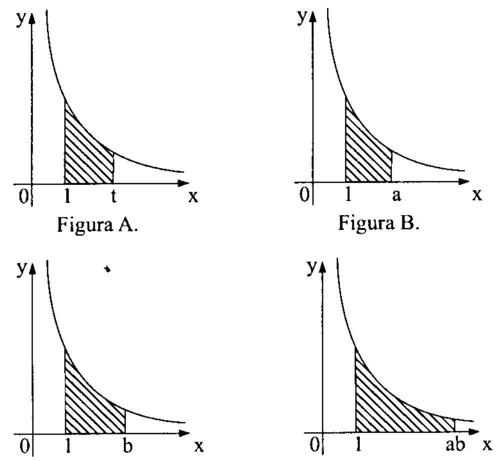


Figura A. Figura B. Figura C. Figura D.

a) Encontre o valor de **t** para que a área seja 2.
b) Demonstre que a soma das áreas das regiões hachuradas na figura B (onde t = a) e na figura C (onde t = b) é igual à área da região hachurada na figura D (onde t = ab).

Resolução:

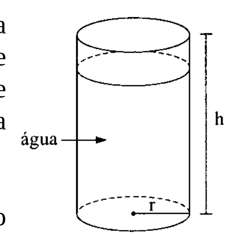
Área = $\log_{10} t$

a) Área = 2 $\Rightarrow$ $\log_{10} t = 2$ $\therefore$ $t = 10^2$ $\Rightarrow$ **t = 100**

b) $S_B + S_C = \log_{10} a + \log_{10} b = \log_{10}(ab) = S_D$

Portanto $S_B + S_C = S_D$

22. Um recipiente contendo água tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm. Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.



a) Calcule o volume de água contido no cilindro. (use $\pi = 3{,}14$).
b) Qual deve ser o raio R de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água?

Resolução:

a) O volume total é

$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, h = 3{,}14 \,.\, 15^2 \,.\, 50 = 35\,325 \text{ cm}^3 \Rightarrow \mathbf{V = 35{,}33\ L}$

$V_{\text{água}} = 35{,}33 \text{ L} - 1 \text{ L} = \mathbf{34{,}33\ L}$

b) $\dfrac{4}{3}\pi \,.\, R^3 = 3\,000 \text{ cm}^3 \Rightarrow R^3 = \dfrac{9\,000}{4\pi} \Rightarrow$

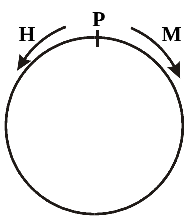
$\mathbf{R = \sqrt[3]{\dfrac{2\,250}{\pi}}\ cm}$

23. Um jovem e uma jovem iniciam sua caminhada diária, em uma pista circular, partindo simultaneamente de um ponto P dessa pista, percorrendo-a em sentidos opostos.

a) Sabendo-se que ela completa uma volta em 18 minutos e ele em 12 minutos, quantas vezes o casal se encontra no ponto P, após a partida, numa caminhada de duas horas?

b) Esboce o gráfico da função f(x) que representa o número de encontros do casal no ponto P, após a partida, numa caminhada de duas horas, com ele mantendo a velocidade correspondente a 12 minutos por volta e ela de x minutos por volta. Assuma que **x** é um número natural e varia no intervalo [18, 25].

Resolução:



a) O jovem passa pelo ponto P em instantes que são múltiplos de 12 minutos.

A jovem passa pelo ponto P em instantes que são múltiplos de 18 minutos.

Ocorrerá encontro entre ambos, no ponto P, em instantes que são múltiplos comuns de 12 e 18.

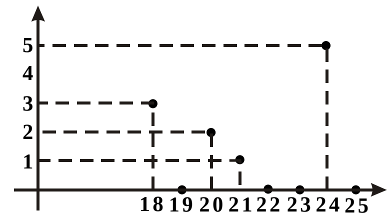
Como M.M.C. (12; 18) = 36 e o tempo total da caminhada é de 120 minutos, haverá encontros nos instantes 36 minutos, 72 minutos e 108 minutos.

Portanto, ocorrerão 3 encontros.

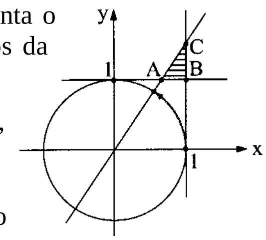
b) Na tabela abaixo, constam as 8 situações possíveis para o item B. Na primeira e na segunda linhas, figuram os intervalos de tempo que o jovem e a jovem, respectivamente, levam para dar uma volta no circuito. A terceira linha introduz o mínimo múltiplo comum de cada par de valores e a última linha contém o número de encontros, f(x), entre ambos no ponto P.

rapaz	12	12	12	12	12	12	12	12
garota	18	19	20	21	22	23	24	25
MMC	36	(>120)	60	84	(>120)	(>120)	24	(>120)
f(x)	3	0	2	1	0	0	5	0

Assim, o gráfico de f(x) em função de **x** é dado por:



24. Com base na figura, que representa o círculo trigonométrico e os eixos da tangente e da cotangente:

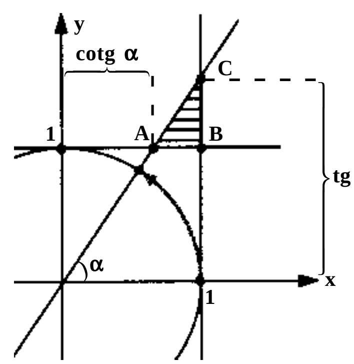


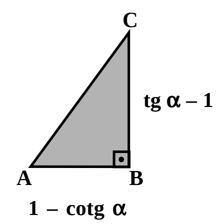
a) calcule a área do triângulo ABC, para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

b) determine a área do triângulo ABC, em função de α, $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução:

b) Adotando-se α = m(BÂC), da observação do ciclo trigonométrico e dos eixos da tangente e da cotangente, vem, no ΔABC:





$$A_\Delta = \frac{1}{2} \,.\, BC \,.\, AB \Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \,.\, (\text{tg}\,\alpha - 1) \,.\, (1 - \text{cotg}\,\alpha)$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right) . \left(\frac{\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}^2\,\alpha - 2\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha}\right)$$

$$A_\Delta = \frac{1 - 2\,\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha} \Rightarrow \therefore A_\Delta = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen\,2\alpha}} - \mathbf{1}$$

com $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

a) Do item anterior, obtemos:

$$A_\Delta = \frac{1}{\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

Portanto, $\mathbf{A_\Delta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - 1}$

25. Um determinado produto é vendido em embalagens fechadas de 30 g e 50 g. Na embalagem de 30 g, o produto é comercializado a R$ 10,00 e na embalagem de 50 g, a R$ 15,00.

a) Gastando R$ 100,00, qual é a quantidade de cada tipo de embalagem para uma pessoa adquirir precisamente 310 g desse produto?

b) Qual é a quantidade máxima, em gramas, que uma pessoa pode adquirir com R$ 100,00?

Resolução:

a) Comprando **x** caixas de 30g, a R$ 10,00 cada, e
y caixas de 50g, a R$ 15,00 cada, vem:

- a quantidade total comprada deve ser 310g:

$$30 \,.\, x + 50 \,.\, y = 310 \text{ (I)}$$

- O preço total da compra deve ser R$ 100,00:

$$10 \,.\, x + 15 \,.\, y = 100 \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 30 \,.\, x + 50 \,.\, y = 310 \\ 10 \,.\, x + 15 \,.\, y = 100 \end{cases}, \text{ de onde } x = 7 \text{ e } y = 2$$

Portanto, devem ser compradas 7 caixas da embalagem de 30g e 2 caixas da embalagem de 50g.

b) Inicialmente, definimos a caixa mais econômica para o comprador, que é a embalagem maior, pois:

$$\begin{cases} \text{caixa menor}: \dfrac{30\text{g}}{\text{R\$ } 10} = 3\text{g} \ / \ \text{R\$} \\ \text{caixa maior}: \dfrac{50\text{g}}{\text{R\$ } 15} \cong 3{,}33\text{g} \ / \ \text{R\$} \end{cases}$$

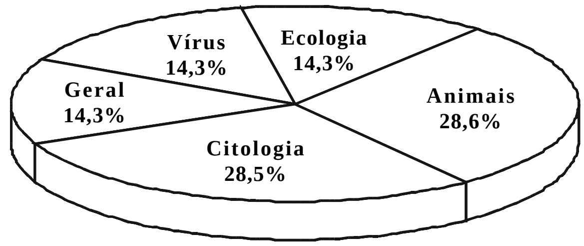
Com R$ 100,00, compramos 6 caixas da embalagem maior (mais vantajosa), a R$ 90,00 no total.
Sobram ainda R$ 10,00, com os quais compramos uma caixa da embalagem menor. Assim:

$$6 \,.\, 50\text{g} + 1 \,.\, 30\text{g} = 330\text{g}$$

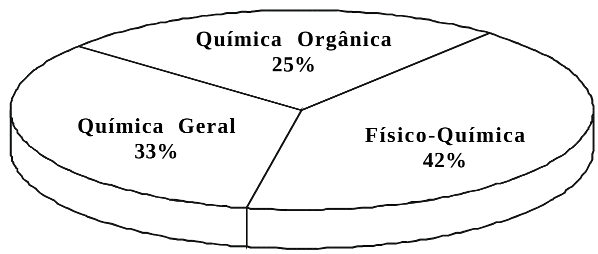
Portanto, a quantidade máxima é 330g

COMENTÁRIOS DA PROVA DA UNIFESP

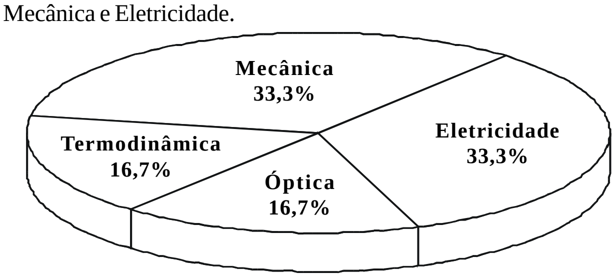
BIOLOGIA — A prova de conhecimentos específicos de Biologia da Unifesp 2003 apresentou aspectos positivos e negativos. No geral,as questões exigiram conhecimento e capacidade analítica dos alunos. Entretanto, no item (b) da questão 1, a pergunta foi inadequada (veja comentário na resolução); a questão 3, por sua vez, abordou um tema que não é incluído no currículo do Ensino Médio. Com isso, a prova perde capacidade de avaliação e tende a igualar o desempenho dos alunos mais capacitados com o daqueles que estão menos preparados.



QUÍMICA — Considerando-se que a prova destina-se a avaliar candidatos à área de Biológicas, constatamos que as questões foram de bom nível, devendo selecionar os melhores candidatos.



FÍSICA — O Vestibular Unifesp 2003 teve um caráter mais quantitativo do que o realizado em 2002, com apenas dois ítens conceituais. A prova foi considerada de nível médio, priorizando Mecânica e Eletricidade.



MATEMÁTICA — A prova específica de Matemática veio complementar a primeira prova tanto com relação ao nível das questões, que exigiram dos alunos conceitos mais elaborados — como deve ser uma prova dissertativa —, como também quanto aos assuntos, privilegiando aqueles que não estiveram presentes na primeira prova.