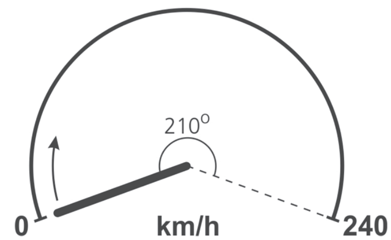
MATEMÁTICA

13. O velocímetro é um instrumento que indica a velocidade de um veículo. A figura abaixo mostra o velocímetro de um carro que pode atingir 240 km/h. Observe que o ponteiro no centro do velocímetro gira no sentido horário à medida que a velocidade aumenta.

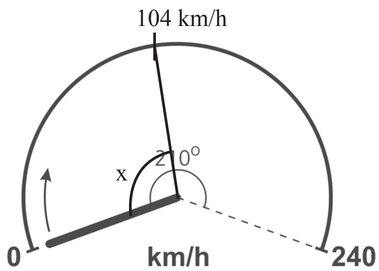


a) Suponha que o ângulo de giro do ponteiro seja diretamente proporcional à velocidade. Nesse caso, qual é o ângulo entre a posição atual do ponteiro (0 km/h) e sua posição quando o velocímetro marca 104 km/h?

b) Determinado velocímetro fornece corretamente a velocidade do veículo quando ele trafega a 20 km/h, mas indica que o veículo está a 70 km/h quando a velocidade real é de 65 km/h. Supondo que o erro de aferição do velocímetro varie linearmente com a velocidade por ele indicada, determine a função v(x) que representa a velocidade real do veículo quando o velocímetro marca uma velocidade de x km/h.

Resolução:

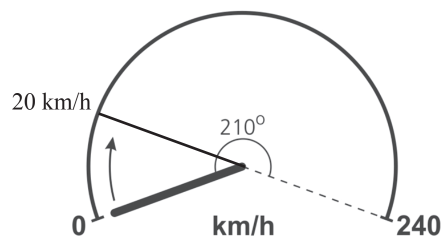
a)



210º —— 240 km/h
x —— 104 km/h

$\Rightarrow x = 91^\circ$

b)



Real		Com erro
20 km/h	——	20 km/h
65	——	70
v(x)		x

$$\frac{65 - 20}{v(x) - 20} = \frac{70 - 20}{x - 20} \Rightarrow$$

$$\frac{45}{v(x) - 20} = \frac{50}{x - 20} \Rightarrow$$

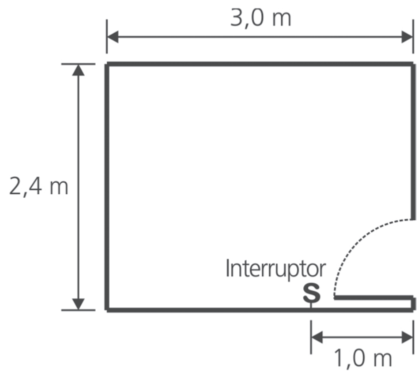
$$\cancel{45}^{\,9}(x - 20) = \cancel{50}^{\,10}(v(x) - 20)$$

$$9x - 180 = 10v(x) - 200$$

$$v(x) = \frac{9x + 20}{10}$$

$$\mathbf{v(x) = \frac{9x}{10} + 2}$$

14. A planta de um cômodo que tem 2,7 m de altura é mostrada ao lado.

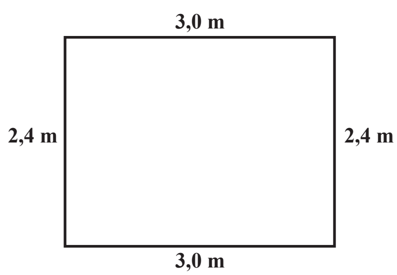


a) Por norma, em cômodos residenciais com área superior a 6 m^2, deve-se instalar uma tomada para cada 5 m ou fração (de 5 m) de perímetro de parede, incluindo a largura da porta. Determine o número mínimo de tomadas do cômodo representado ao lado e o espaçamento entre as tomadas, supondo que elas serão distribuídas uniformemente pelo perímetro do cômodo.

b) Um eletricista deseja instalar um fio para conectar uma lâmpada, localizada no centro do teto do cômodo, ao interruptor, situado a 1,0 m do chão, e a 1,0 m do canto do cômodo, como está indicado na figura. Supondo que o fio subirá verticalmente pela parede, e desprezando a espessura da parede e do teto, determine o comprimento mínimo de fio necessário para conectar o interruptor à lâmpada.

Resolução:

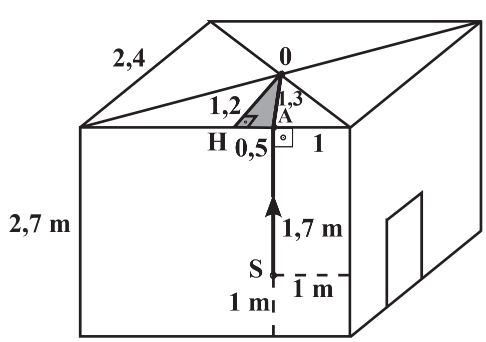
a) O perímetro é 2p = 10,8 m, logo o número de tomadas é $n \geq \dfrac{10,8}{5} \therefore n \geq 2,16 \therefore$ **n = 3** no mínimo e o espaçamento entre eles é $\mathbf{e} = \dfrac{10,8}{3} \therefore$ **e = 3,6 m**



b) Sendo O o centro do teto, OH a distância de O à parede que contém o interruptor S, então o ΔAHO é retângulo em H, portanto $OA^2 = AH^2 + OH^2$ (Teorema de Pitágoras)

Logo $OA^2 = (0,5)^2 + (1,2)^2 \therefore$ **OA = 1,3 m**

O comprimento do fio é C = SA + OA $\therefore$ C = 1,7 + 1,3 $\therefore$ **C = 3m**



15. O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de $\frac{x+1}{x} = x$

a) Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.
b) A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... é conhecida como sequência de Fibonacci, cujo n-ésimo termo é definido recursivamente pela fórmula

$$F(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ ou } 2; \\ F(n-1) + F(n-2), \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

Podemos aproximar o número áureo, dividindo um termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior. Calcule o 10º e o 11º termos dessa sequência e use-os para obter uma aproximação com uma casa decimal para o número áureo.

Resolução:

a) $\frac{x+1}{x} = x \Rightarrow x^2 = x + 1$

Portanto, como uma equação quadrática, temos: $x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = 5 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número áureo.

b) Os 11 primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

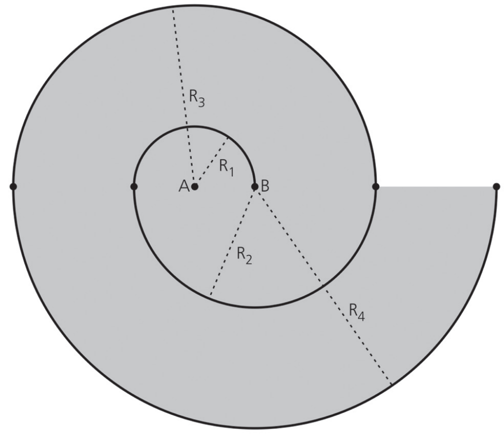
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

Portanto, o 10º termo é 55 e o 11º termo é 89.

Fazendo $\frac{89}{55} = 1,61818...$

Portanto, $\frac{89}{55} \cong 1,6$.

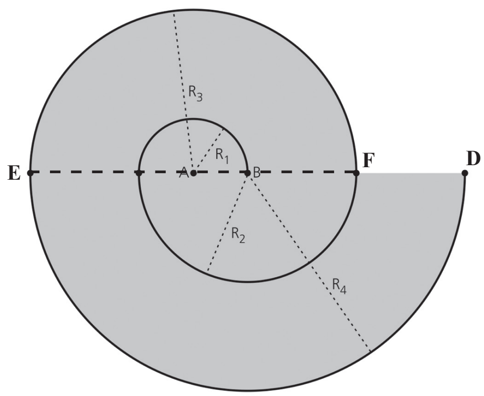
16. Uma curva em formato espiral, composta por arcos de circunferência, pode ser construída a partir de dois pontos **A** e **B**, que se alternam como centros dos arcos. Esses arcos, por sua vez, são semicircunferências que concordam sequencialmente nos pontos de transição, como ilustra a figura ao lado, na qual supomos que a distância entre **A** e **B** mede 1 cm.



a) Determine a área da região destacada na figura.
b) Determine o comprimento da curva composta pelos primeiros 20 arcos de circunferência.

Resolução:

a)



A área pedida é dada por:

$$A = A_{\text{semicírculo}\,\overset{\frown}{EF}} + A_{\text{semicírculo}\,\overset{\frown}{DE}}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} + \frac{\pi \cdot 3^2}{2}$$

$$A = \frac{25\pi}{2}\ \text{cm}^2$$

b) O comprimento total é dado por:

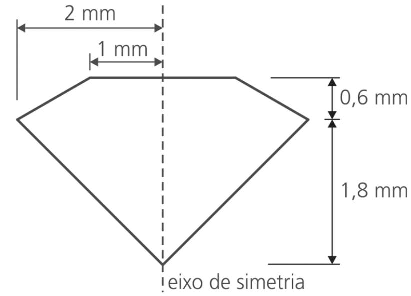
$$C = \frac{1}{2}2\pi \cdot 1 + \frac{1}{2}2\pi \cdot 2 + \frac{1}{2}2\pi \cdot 3 + \frac{1}{2}2\pi \cdot 4 + ... + \frac{1}{2}2\pi \cdot 20)$$

$$C = \pi(\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + 20}_{PA})$$

$$C = \pi\frac{(1 + 20)20}{2}$$

$$\mathbf{C = 210\pi\ cm}$$

17. Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.



a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/cm^3, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura ao lado apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.

Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula

$V = \frac{\pi}{3} h(R^2 + Rr + r^2)$, em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

Resolução:

a) Segundo o enunciado:

1 quilate ——— 200 mg
0,7 quilate ——— M

$$M = \frac{0,7 \cdot 200}{1}$$

Sendo M = 140 mg a massa de 0,7 quilate, temos:

3,5 g ——— 1 cm^3
140 mg ——— V

$$V = \frac{140 \cdot 1}{3500}$$

Portanto, o volume de um brilhante com 0,7 quilate é igual a 0,04 cm^3.

b) $V = V_{tronco} + V_{cone}$

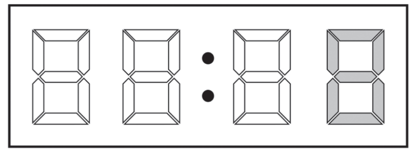
$$V = \frac{\pi}{3} \cdot 0,6\,(1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2) + \frac{1}{\cancel{3}}\,\pi \cdot 2^2 \cdot \overset{0,6}{\cancel{1,8}}$$

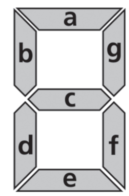
$$V = \pi \cdot 0,2\,(7) + 2,4\pi$$

$$V = 1,4\pi + 2,4\pi$$

$$V = 3,8\pi \text{ mm}^3$$

18. O mostrador de determinado relógio digital indica horas e minutos, como ilustra a figura ao lado, na qual o dígito da unidade dos minutos está destacado.
O dígito em destaque pode representar qualquer um dos dez algarismos, bastando para isso que se ative ou desative as sete partes que o compõem, como se mostra abaixo.





a) Atribuindo as letras **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, g aos trechos do dígito destacado do relógio, como se indica ao lado, pinte no gráfico de barras abaixo a porcentagem de tempo em que cada um dos trechos fica aceso. Observe que as porcentagens referentes aos trechos **f** e **g** já estão pintadas.

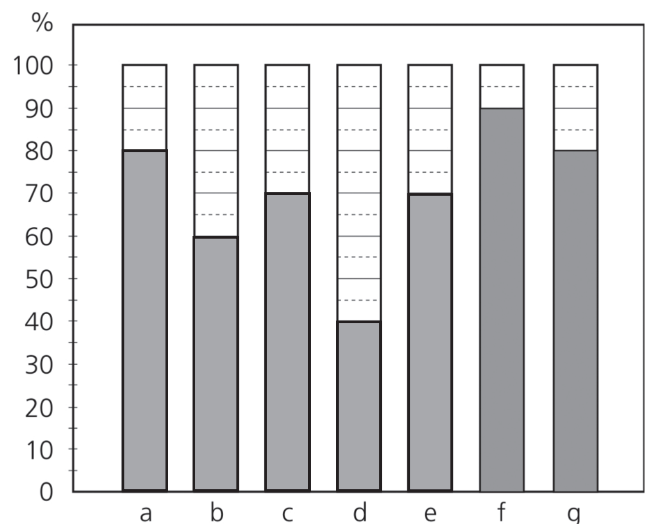
b) Supondo, agora, que o dígito em destaque possua dois trechos defeituosos, que não acendem, calcule a probabilidade do algarismo 3 ser representado corretamente.

Resolução:

a) As frequências dos trechos são:

a $\rightarrow$ 8
b $\rightarrow$ 6
c $\rightarrow$ 7
d $\rightarrow$ 4
e $\rightarrow$ 7
f $\rightarrow$ 9
g $\rightarrow$ 8

Então o gráfico será:



b) Podemos ter dois trechos defeituosos de $C_{7,2} = 21$ maneiras diferentes.
Para que o número 3 apareça de forma correta, só há uma única maneira, onde **b** e **d** com defeitos.

Portanto, a probabilidade de o algarismo 3 ser representado corretamente é $\mathbf{P = \dfrac{1}{21}}$.

19. Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme se descreve na tabela abaixo:

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.

b) Geralmente, as cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem 192π cm^2 de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

Resolução:

a) Seja o sistema: $\begin{cases} p + g = 40 \\ 25p + 200g = 1700 \end{cases}$ Escalonando, temos: $\begin{cases} p + g = 40 \\ g = 4 \end{cases}$

Portanto, são 4 cebolas grandes e 36 cebolas pequenas.

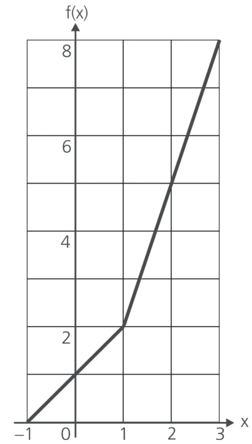
b) 600 g correspondem a 24 cebolas pequenas, pois $\dfrac{600}{25} = 24$.

Então, $S = 24 \cdot 4\pi \cdot 4 = 384\pi$ cm^2 é a área da casca das cebolas pequenas.

600 g correspondem a 3 cebolas grandes, cuja área da casca é 192π cm^2.

Logo, as cebolas grandes fornecem menor desperdício com cascas.

20. Considere a função $f(x) = 2x + |x + p|$, definida para x real.



a) A figura ao lado mostra o gráfico de f(x) para um valor específico de p. Determine esse valor.
b) Supondo, agora, que p = –3, determine os valores de x que satisfazem a equação f(x) = 12.

Resolução:

a) Observando o gráfico:

Se $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$

Portanto, $2(1) + |1 + p| = 2$

Logo, $\mathbf{p = -1}$

b) Para p = –3, $f(x) = 2x + |x - 3|$
Como $f(x) = 12$, $2x + |x - 3| = 12$

Vamos considerar dois casos:

I) se $x \geq 3$, então $2x + x - 3 = 12$
Logo, $\mathbf{x = 5}$

II) se $x < 3$, então $2x - x + 3 = 12$
Logo, $\mathbf{x = 9}$ **(não convém)**

Portanto, se f (x) = 12, x = 5.

21. Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma

$$P(T) = a \,.\, 10^{bT},$$

em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

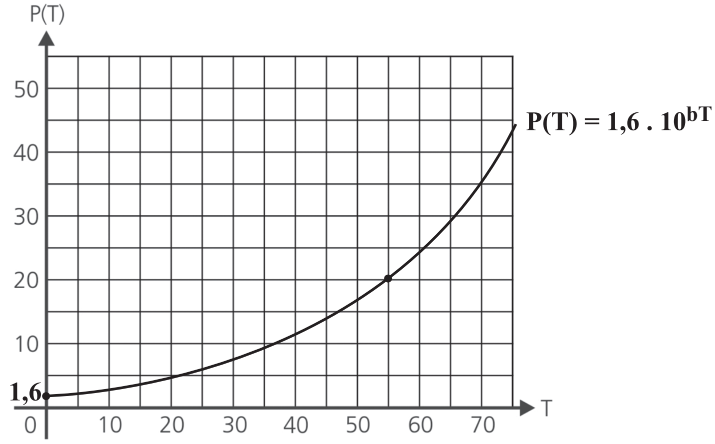
Temperatura (°C)	Perda anual de capacidade (%)
0	1,6
55	20,0

Com base na expressão de P(T) e nos dados da tabela,

a) esboce, abaixo, a curva que representa a função P(T), exibindo o percentual exato para T = 0 e T = 55;
b) determine as constantes a e b para a bateria em questão. Se necessário, use $\log_{10}(2) \approx 0{,}30$, $\log_{10}(3) \approx 0{,}48$ e $\log_{10}(5) \approx 0{,}70$.

Resolução:

a)



b) $T = 0 \;\Rightarrow\; a \,.\, 10^{b\,.\,0} = 1{,}6 \;\Rightarrow\; \mathbf{a = 1{,}6}$

$T = 55 \;\Rightarrow\; 1{,}6 \,.\, 10^{b\,.\,55} = 20 \;\Rightarrow\; 10^{55b} = \dfrac{125}{10}$

$\log 10^{55b} = \log \dfrac{5^3}{10} \;\Rightarrow\; 55b \log 10 = 3 \log 5 - \log 10$

$55b = 3(1 - \log 2) - 1$

$55b = 3(1 - 0{,}30) - 1 \;\Rightarrow\; b = \dfrac{1{,}1}{55} \;\Rightarrow\; \mathbf{b = \dfrac{1}{50}}$

22. Seja dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix}$, em que **x** é um número real.

a) Determine para quais valores de **x** o determinante de **A** é positivo.

b) Tomando

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e supondo que, na matriz A, x = –2, calcule B = AC.

Resolução:

a) $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix}$

$\det A > 0 \Rightarrow 16x^3 - 36x - 64x > 0$

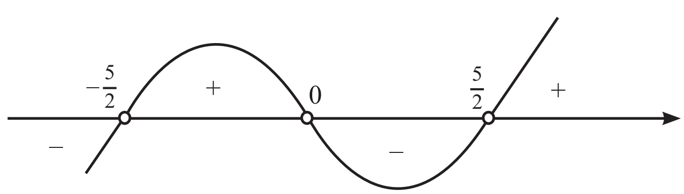
$16x^3 - 100x > 0$

$4x\,(4x^2 - 25) > 0$

$P(x) = 16x^3 - 100x$ possui 3 raíz reais

que são $x = 0$, $x = \dfrac{5}{2}$ e $x = -\dfrac{5}{2}$

portanto o gráfico de P(x) será



Como $P(x) > 0$ então $S = \left]-\dfrac{5}{2}; 0\right[\cup \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$

b) Se x = –2 então

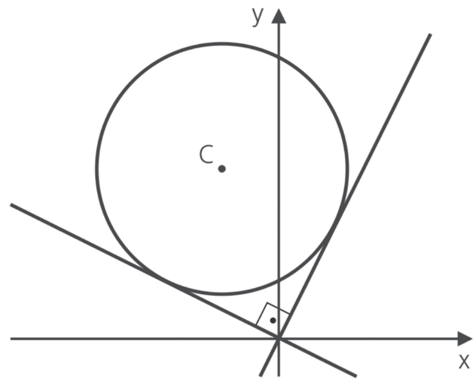
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & -32 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

B = AC

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}$$

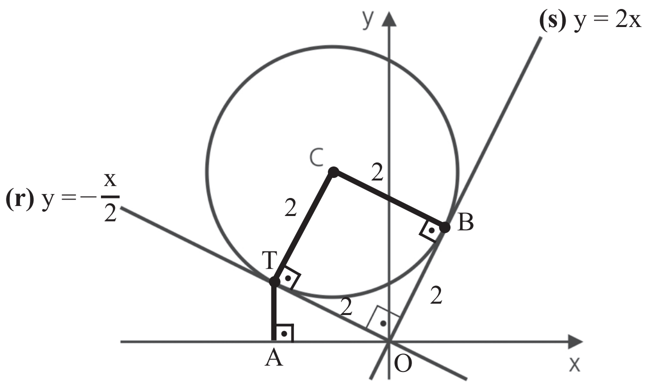
23. Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas y = 2x e y = –x/2, conforme mostra a figura abaixo.



a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta y = –x/2.

b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

Resolução:



a) As retas $y = -\dfrac{x}{2}$ e y = 2x são perpendiculares.

Portanto, OB = OT = 2, sendo T e B os pontos de tangência.

Se T pertence à reta **(r)** $y = -\dfrac{x}{2}$, então $T\left(k; -\dfrac{k}{2}\right)$.

No ΔAOT, tem-se: $OT^2 = AT^2 + AO^2$

$$2^2 = \left(-\frac{k}{2}\right)^2 + k^2 \Rightarrow k = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ e } -\frac{k}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

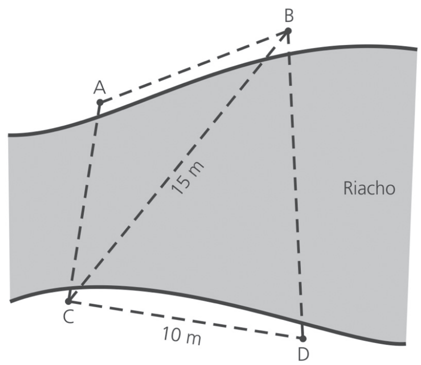
Logo, $T\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}; \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

b) Sejam as retas **(r)** x + 2y = 0
(s) 2x – y = 0
e $d_{Cr} = d_{Cs} = 2$, então:

$$\frac{|x+2y|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \Rightarrow |x+2y| = |2x-y|$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2x - y \Rightarrow x - 3y = 0 \text{ (não convém)} \\ x + 2y = -2x + y \Rightarrow 3x = -y \Rightarrow y = -3x \end{cases}$$

24. Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito.

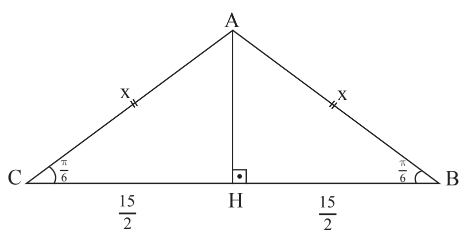


Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

a) Calcule a distância entre A e B.
b) Calcule a distância entre B e D.

Resolução:

a) Temos que o ΔABC é isósceles:



Se $\overline{AH}$ é a altura do ΔABC, temos que CH = HB = $\frac{15}{2}$ m.

No ΔABH, temos: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{15}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{15}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

A distância AB vale $5\sqrt{3}$ m .

b) Aplicando a Lei dos Cossenos no ΔBCD, temos:

$y^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos\frac{\pi}{3}$
$y^2 = 100 + 225 - 2 \cdot 150 \cdot \frac{1}{2}$
$y^2 = 175$
$y = 5\sqrt{7}$
A distância BD vale $5\sqrt{7}$ m .